Esercizio risolto: generatrice del contorno di un cono

Problema: che forma ha la curva generatrice del contorno di un cono, in un'immagine prospettica?

Supponiamo (senza perdita di generalità) che la base del cono sia orizzontale. Il cono è a base circolare ed ha asse perpendicolare alla base. Sia C la circonferenza base del cono, V il vertice (apice).

La curva generatrice del contorno G è indipendente dalla posizione e orientamento del piano immagine, e dipende esclusivamente dalla posizione del centro ottico O. G è una curva 3D nella scena, la sua proiezione g è una curva bidimensionale sull'immagine. Ovviamente, g dipende anche dalla posizione e orientamento del piano immagine.

Tutti i punti di G stanno sulla superficie del cono.

Due casi banali:
- se O si trova all'interno del prolungamento del cono, sotto la base;
- se O si trova all'interno del prolungamento del cono (un cono rovesciato) sopra il vertice.

In questi casi, G equivale a C, e il contorno g è un'ellisse, proiezione di c. D'ora in poi ignoreremo queste situazioni.

Nel caso generale, G è formata dall'unione di tre oggetti:
- Un arco della circonferenza C. Chiamiamo P1 e P2 gli estremi di questo arco, e θ l'angolo corrisponedente.
- Il segmento (rettilineo) P1V
- Il segmento (rettilineo) P2V

Si tratta di una curva chiusa nello spazio.

Il contorno g nell'immagine è la proiezione di G; è formato dall'unione delle proiezioni dei tre oggetti considerati; si tratta quindi di un arco di ellisse e due segmenti rettilinei.

Estensione: quanto è ampio l'arco di C appartenente a G? Più o meno di 180°?

L'arco della circonferenza appartenente a C può essere più o meno ampio a seconda della posizione del centro ottico. Intuitivamente:
- Se O si trova sul piano della base, θ ≤ 180°; uguale solo quando O è all'infinito. Questo perchè P1 e P2 sono punti di tangenza tra C e una retta passante per O.
- Se O si trova "sufficientemente in alto", θ può essere maggiore di 180°. Non è immediatamente intuitivo ma si verifica facilmente osservando un cono reale.

La demarcazione tra le due situazioni è data dalla configurazione in cui O si trova alla stessa altezza di V. In questo caso, θ = 180°.

Per convincersene, basta considerare i due piani appoggiati alla superficie laterale del cono e passanti per O. Questi due piani (chiamiamoli T1 e T2) sono tangenti a C in P1 e P2 rispettivamente. Inoltre, l'intersezione tra T1 e T2 è una linea orizzontale, contenente sia O che V -- la direzione di questa linea è una direzione in comune tra i due piani. L'intersezione tra T1 e il piano della base è una retta parallela all'intersezione tra T2 e il piano della base. Tali rette sono tangenti a C in P1 e P2 rispettivamente. Quindi P1 e P2 sono diametralmente opposti, e θ è 180°.

Riassumendo, se O sta tra il piano della base del cono e una quota pari a quella di V, θ ≤ 180°; se O sta alla quota di V, θ = 180°; se O sta più in alto, θ > 180°.

Nota: se O è alla stessa quota di V, i segmenti rettilinei del contorno nell'immagine, proiezione di P1V e P2V, possono anche essere interpretati come le proiezioni delle linee tangenti a C in P1 e in P2, rispettivamente. Essendo queste due linee parallele, l'intesezione delle loro immagini è il punto di fuga della loro direzione. In altre parole, l'immagine del vertice è il punto di fuga di una direzione parallela al piano orizzontale.

Nota: I risultati ottenuti valgono anche nel caso di cono generalizzato, a base ellittica, e avente come vertice un punto qualsiasi nello spazio 3D.